VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

ДВУМЕРНЫЙ СГЛАЖИВАЮЩИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПЛАЙН

Марков К. Н., Ширков П. Д.

(Россия, Дубна)

В работе рассматривается задача сглаживания функции двух переменных, заданной на нерегулярной сетке. Описывается алгоритм построения сглаживающего биквадратного двухпараметрического сплайна, использующий регуляризацию при поиске минимума функции многих переменных. Предложенный алгоритм легко обобщается на случай сплайнов более высокой степени.

На практике часто приходится иметь дело со случаем, когда значения в узлах сетки заданы с некоторой погрешностью. Например, они могут быть результатами каких-либо трудоемких измерений или вычислений. В этом случае нет необходимости удовлетворять точному прохождению сплайна в заданных точках, а достаточно строить сплайн, проходящий вблизи этих точек. Такие сплайны называются *сглаживающими*, а процедура их построения – *сглаживанием* [1].

Пусть задана таблица величин $\{x_l, y_l, z_l\}_{l=1...N}$. Будем считать эти переменные двухпараметрическими функциями достаточной гладкости, например, принадлежащими к классу $C^2(R)$:

$$x = x(v,u);\;\; y = y(v,u);\;\; z = z(v,u), \qquad (1)$$

где $v,u \in R^2$ и $0 \le v \le 1; 0 \le u \le 1$.

Для каждого направления на отрезке [0,1] введем равномерную сетку

$$\omega \;\; (a = 0 = t_0) \le t_1 \le ... \le t_{n-1} \le (t_n = 1 = b),$$

где $t_i = a + \frac{i \cdot (b-a)}{n}$. Для нумерации ячеек введем два индекса i, j, где $i = 0 ... n-1$ и $j = 0 ... n-1$, n – количество узлов сетки; таким же образом будут нумероваться кусочки сплайна. По направлению u изменяется индекс i, по направлению v – j. Под $\overline{r}_k^{i,j}$ понимается одна из компонент таблицы (x, y, z), где $k = 1 ... m_{i,j}$, $m_{i,j}$ – количество экспериментальных данных в ячейке с индексом i, j.

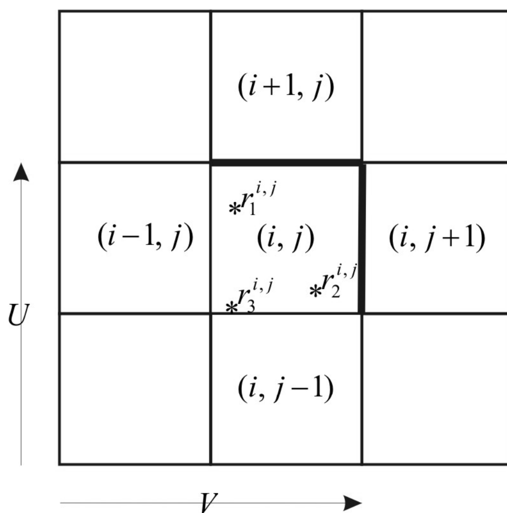


Рис. 1. Исходные данные

Таким образом, все элементы множества исходных табличных данных (тройки (x_i, y_i, z_i), $i = 1,...,N$) принадлежат кубу $\{x(0,0) \le x \le x(1,1),\ \ y(0,0) \le y \le y(1,1),\ \ z(0,0) \le z \le z(1,1)\}$, а задачу их сглаживания будем решать независимо для каждой функции (1).

В данной работе искомую функцию в каждой ячейке будем приближать квадратичным сплайном, зависящим от u и v: $\varphi_{i,j}(u_i, v_j, C_1^{i,j},...,C_6^{i,j}) = v_j^2 C_1^{i,j} + u_i^2 C_2^{i,j} + u_i v_j C_3^{i,j} + u_i C_4^{i,j} + v_j C_5^{i,j} + C_6^{i,j}$,

где $C_1^{i,j},...,C_6^{i,j}$ – коэффициенты сплайна; в дальнейшем из них будет формироваться вектор неизвестных.

Задача сглаживания функций в случае 2-х переменных рассматривается как задача минимизации составного функционала, учитывающего «скачки» (разрывы) вторых производных и отклонения сплайна от табличных значений при условии непрерывности сплайна и его первых производных:

$$\begin{aligned}&\Phi(\vec{C}) = \Phi_1(\vec{C}) + \\ &+\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{p_i q_j}\left[\varphi\left(u_k^{i,j}, v_k^{i,j}, C_1^{i,j},...,C_6^{i,j}\right) - r_k^{i,j}\right]^2 \Rightarrow \min,\end{aligned} \tag{2}$$

где $r_k^{i,j}$, как и прежде, одна из компонент исходных экспериментальных данных в ячейке с индексом i, j, $k = 1,...,m$, m – количество экспериментальных данных в ячейке с индексом (i, j), а $p_i, q_j > 0$ – заданные веса. Чем меньше коэффициенты p_i, q_j, тем ближе к заданным табличным значениям $r_k^{i,j}$ проходит функция, минимизирующая функционал (2). В данной работе в дополнительном слагаемом $\Phi_1(\vec{C})$ будут учтены суммы скачков 2-х производных и регуляризация.

Для нахождения условного минимума функционала воспользуемся методом Лагранжа [2]. На искомый сплайн накладываются следующие условия:

1) Непрерывность на границе.

Для верхней границы имеем $\varphi_{i,j} = \varphi_{i+1,j}$, для $\forall v$:

$$\left[\begin{aligned}&v^2 C_1^{i,j} + u_{i+1}^2 C_2^{i,j} + v u_{i+1} C_3^{i,j} + u_{i+1} C_4^{i,j} + v C_5^{i,j} + C_6^{i,j} = \\ &= v^2 C_1^{i+1,j} + u_{i+1}^2 C_2^{i+1,j} + v u_{i+1} C_3^{i+1,j} + u_{i+1} C_4^{i+1,j} + v C_5^{i+1,j} + C_6^{i+1,j}\end{aligned}\right]. \tag{3}$$

Из (3) очевидным образом следует, что:

$$\begin{cases} C_1^{i+1,j} - C_1^{i,j} = 0; \\ u_{i+1}(C_3^{i+1,j} - C_3^{i,j}) + (C_5^{i+1,j} - C_5^{i,j}) = 0; \\ u_{i+1}^2(C_2^{i+1,j} - C_2^{i,j}) + u_{i+1}(C_4^{i+1,j} - C_4^{i,j}) + (C_6^{i+1,j} - C_6^{i,j}) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Для правой границы справедливо $\varphi_{i,j} = \varphi_{i,j+1}$, для $\forall u$; т.е.:

$$\begin{bmatrix} v_{j+1}^2 C_1^{i,j} + u^2 C_2^{i,j} + v_{j+1} u C_3^{i,j} + u C_4^{i,j} + v_{j+1} C_5^{i,j} + C_6^{i,j} = \\ = v_{j+1}^2 C_1^{i,j+1} + u^2 C_2^{i,j+1} + v_{j+1} u C_3^{i,j+1} + u C_4^{i,j+1} + v_{j+1} C_5^{i,j+1} + C_6^{i,j+1} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Из (5) следует:

$$\begin{cases} C_2^{i,j+1} - C_2^{i,j} = 0; \\ v_{j+1}(C_3^{i,j+1} - C_3^{i,j}) + (C_4^{i,j+1} - C_4^{i,j}) = 0; \\ v_{j+1}^2(C_1^{i,j+1} - C_1^{i,j}) + v_{j+1}(C_5^{i,j+1} + C_5^{i,j}) + (C_6^{i,j+1} - C_6^{i,j}) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

2) Непрерывность первой производной.

Для верхней границы имеем $\left.\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial u}\right|_{u=u_{i+1}} = \left.\frac{\partial \varphi_{i+1,j}}{\partial u}\right|_{u=u_{i+1}}$, для $\forall u$:

$$2u_{i+1} C_2^{i,j} + v C_3^{i,j} + C_4^{i,j} = 2u_{i+1} C_2^{i+1,j} + v C_3^{i+1,j} + C_4^{i+1,j}. \quad (7)$$

Из (7) следует:

$$\begin{cases} C_3^{i+1,j} - C_3^{i,j} = 0; \\ 2u_{i+1}(C_2^{i+1,j} - C_2^{i,j}) + (C_4^{i+1,j} - C_4^{i,j}) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для правой границы справедливо $\left.\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial v}\right|_{v=v_{j+1}} = \left.\frac{\partial \varphi_{i,j+1}}{\partial v}\right|_{v=v_{j+1}}$, для $\forall v$; т.е.:

$$2v_{j+1} C_1^{i,j} + u C_3^{i,j} + C_5^{i,j} = 2v_{j+1} C_1^{i,j+1} + u C_3^{i,j+1} + C_5^{i,j+1}. \quad (9)$$

Из (9) следует:

$$\begin{cases} C_3^{,ij+1} - C_3^{i,j} = 0; \\ 2v_{j+1}(C_1^{i,j+1} - C_1^{i,j}) + (C_5^{i,j+1} - C_5^{i,j}) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Из непрерывности на границе и непрерывности первой производной следует, что $C_3^{i,j} = \text{const}$, таким образом, (4), (6), (8) и (10) можно переписать в виде

$$\begin{cases} 2v_{j+1}(C_1^{i,j+1} - C_1^{i,j}) + (C_5^{i,j+1} - C_5^{i,j}) = 0; \\ v_{j+1}^2(C_1^{i,j+1} - C_1^{i,j}) + v_{j+1}(C_5^{i,j+1} - C_5^{i,j}) + (C_6^{i,j+1} - C_6^{i,j}) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} 2u_{i+1}(C_2^{i+1,j} - C_2^{i,j}) + (C_4^{i+1,j} - C_4^{i,j}) = 0; \\ u_{i+1}^2(C_2^{i+1,j} - C_2^{i,j}) + u_{i+1}(C_4^{i+1,j} - C_4^{i,j}) + (C_6^{i+1,j} - C_6^{i,j}) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Запишем системы (11) и (12) более компактно:

$$\begin{cases} v_{j+1}(C_5^{i,j+1} - C_5^{i,j}) = -2(C_6^{i,j+1} - C_6^{i,j}); \\ v_{j+1}^2(C_1^{i,j+1} - C_1^{i,j}) = C_6^{i,j+1} - C_6^{i,j}, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} u_{i+1}(C_4^{i+1,j} - C_4^{i,j}) = -2(C_6^{i+1,j} - C_6^{i,j}); \\ u_{i+1}^2(C_2^{i+1,j} - C_2^{i,j}) = C_6^{i+1,j} - C_6^{i,j}. \end{cases} \quad (14)$$

Перепишем теперь систему (13) относительно $C_1^{i,j}$, а систему (14) относительно $C_2^{i,j}$:

$$\begin{cases} C_6^{i,j+1} - C_6^{i,j} = v_{j+1}^2(C_1^{i,j+1} - C_1^{i,j}); \\ C_5^{i,j+1} - C_5^{i,j} = -2v_{j+1}(C_1^{i,j+1} - C_1^{i,j}), \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} C_6^{i+1,j} - C_6^{i,j} = u_{i+1}^2(C_2^{i+1,j} - C_2^{i,j}); \\ C_4^{i+1,j} - C_4^{i,j} = -2u_{i+1}(C_2^{i+1,j} - C_2^{i,j}). \end{cases} \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) войдут в функционал (2) в качестве множителей Лагранжа, следовательно, он может быть записан в виде:

$$
\begin{aligned}
&\Phi(\vec{C}) = \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}\left[(2C_1^{i-1,j-1} + C_3^{i-1,j-1} + 2C_2^{i-1,j-1}) - (2C_1^{i,j} + C_3^{i,j} + 2C_2^{i,j})\right]^2 + \\
&+\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{p_i q_j}\left[\left(v_k^{i,j}\right)^2 C_1^{i,j} + \left(u_k^{i,j}\right)^2 C_2^{i,j} + u_k^{i,j}C_4^{i,j} + v_k^{i,j}C_5^{i,j} + C_6^{i,j} - r_k^{i,j}\right]^2 + \\
&+\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{i=0}^{n-3}\begin{bmatrix}
\lambda_{4i+4j(n-2)+1}((C_6^{i+1,j} - C_6^{i,j}) - u_{i+1}^2(C_2^{i+1,j} - C_2^{i,j})) + \\
\lambda_{4i+4j(n-2)+2}((C_4^{i+1,j} - C_4^{i,j}) + 2u_{i+1}(C_2^{i+1,j} - C_2^{i,j})) + \\
\lambda_{4i+4j(n-2)+3}((C_6^{j,i+1} - C_6^{j,i}) - v_{i+1}^2(C_1^{j,i+1} - C_1^{j,i})) + \\
\lambda_{4i+4j(n-2)+4}((C_5^{j,i+1} - C_5^{j,i}) + 2v_{i+1}(C_1^{j,i+1} - C_1^{j,i}))
\end{bmatrix} + \\
&+ a\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=1}^{6}\left[C_k^{i,j}\right]^2 \Rightarrow \min,
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

где a – коэффициент регуляризации [3]. Последнее слагаемое в функционале (17) введено для того, чтобы повысить устойчивость алгоритмов линейной алгебры, возникающих на этапе поиска минимума. При этом используется простейшая регуляризирующая функция, минимизирующая длину вектора решения, а ее параметр подбирается вручную.

Продифференцировав функционал (17) по $C_k^{i,j}$

$$
\left.\frac{\partial\Phi}{\partial C_k^{i,j}}\right|_{\substack{i=0,..,n-2\\ j=0,...,n-2\\ k=1,...,6}} = 0 \text{ и } \lambda_l \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_l}\right|_{l=1,...,4(n-2)(n-1)} = 0,
$$

получим систему линейных алгебраических уравнений

$$
Ax = b. \qquad (18)
$$

Здесь

$$
x = \left[\vec{C}_{0,0}, \vec{C}_{0,1}, ..., \vec{C}_{0,n-3}, \vec{C}_{0,n-2}, ..., \vec{C}_{n-3,0}, ..., \vec{C}_{n-3,n-3}, \vec{C}_{n-3,n-2}, \vec{C}_{n-2,0}, ..., \vec{C}_{n-2,n-3}, \vec{C}_{n-2,n-2}, \lambda_1, ..., \lambda_l\right]^T,
$$

$$
b = \left[\vec{B}_{0,0}, \vec{B}_{0,1}, ..., \vec{B}_{0,n-3}, \vec{B}_{0,n-2}, ..., \vec{B}_{n-3,0}, ..., \vec{B}_{n-3,n-3}, \vec{B}_{n-3,n-2}, \vec{B}_{n-2,0}, ..., \vec{B}_{n-2,n-3}, \vec{B}_{n-2,n-2}, 0, ..., 0\right]^T,
$$

где $l = 4\cdot(n-2)\cdot(n-1)$, а матрица системы (для получения которой использовался специально разработанный программный код для работы с символьными вычислениями и пакет MapleVII) имеет блочную структуру, схематично изображенную ниже:

$$A=\left[\begin{array}{c|ccccccccccccccc|ccc}
 & \vec{C}_{0,0} & \vec{C}_{0,1} & \dots & \vec{C}_{0,n-3} & \vec{C}_{0,n-2} & \dots & \vec{C}_{n-3,0} & \dots & \vec{C}_{n-3,n-3} & \vec{C}_{n-3,n-2} & \vec{C}_{n-2,0} & \dots & \vec{C}_{n-2,n-3} & \vec{C}_{n-2,n-2} & \lambda_1 & \dots & \lambda_l \\ \hline
\vec{C}_{0,0} & M^{*} & & & & & & & \dots & & & & & & & & & \text{—} \\
\vec{C}_{0,1} & & M^{*} & & & & & & & M^{**} & & & & & & \text{—} & & \\
\dots & & & \dots & & & & & & & M^{**} & & & & & & \dots & \\
\vec{C}_{0,n-3} & & & & M^{*} & & & & & & & & & & & & & \text{—} \\
\vec{C}_{0,n-2} & & & & & M^{*} & & & & & & & \dots & & & \text{—} & & \\
\dots & & & & & & \dots & & & & & & & M^{**} & & & \dots & \\
\vec{C}_{n-3,0} & & & & & & & M^{*} & & & & & & & M^{**} & & & \text{—} \\
\dots & \dots & & & & & & & \dots & & & & & & & & \dots & \\
\vec{C}_{n-3,n-3} & & M^{**} & & & & & & & M^{*} & & & & & & \text{—} & & \\
\vec{C}_{n-3,n-2} & & & M^{**} & & & & & & & M^{*} & & & & & & & \text{—} \\
\vec{C}_{n-2,0} & & & & & & & & & & & M^{*} & & & & \text{—} & & \\
\dots & & & & & \dots & & & & & & & \dots & & & & \dots & \\
\vec{C}_{n-2,n-3} & & & & & & M^{**} & & & & & & & M^{*} & & \text{—} & & \\
\vec{C}_{n-2,n-2} & & & & & & & M^{**} & & & & & & & M^{*} & & & \text{—} \\ \hline
\lambda_1 & \text{—} & & & \text{—} & & & \text{—} & & & \text{—} & & & \text{—} & & & & \\
\dots & & & \dots & & & \dots & & \dots & & & & \dots & & & & & \\
\lambda_l & & \text{—} & & & \text{—} & & & & \text{—} & & \text{—} & & & \text{—} & & &
\end{array}\right]$$

Рис. 2. Матрица системы (18)

$$M^{*}_{i,j}=\left[\begin{array}{cccccc}
 & C_1^{i,j} & C_2^{i,j} & C_4^{i,j} & C_5^{i,j} & C_6^{i,j} \\
C_1^{i,j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(v_k^{i,j}\right)^4}{p_iq_j}+2a & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(v_k^{i,j}\right)^2\left(u_k^{i,j}\right)^2}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(v_k^{i,j}\right)^2u_k^{i,j}}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(v_k^{i,j}\right)^3}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(v_k^{i,j}\right)^2}{p_iq_j} \\
C_2^{i,j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(v_k^{i,j}\right)^2\left(u_k^{i,j}\right)^2}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(u_k^{i,j}\right)^4}{p_iq_j}+2a & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(u_k^{i,j}\right)^3}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}v_k^{i,j}\left(u_k^{i,j}\right)^2}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(u_k^{i,j}\right)^2}{p_iq_j} \\
C_4^{i,j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(v_k^{i,j}\right)^2u_k^{i,j}}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(u_k^{i,j}\right)^3}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(u_k^{i,j}\right)^2}{p_iq_j}+2a & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}v_k^{i,j}u_k^{i,j}}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}u_k^{i,j}}{p_iq_j} \\
C_5^{i,j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(v_k^{i,j}\right)^3}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}v_k^{i,j}\left(u_k^{i,j}\right)^2}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}v_k^{i,j}u_k^{i,j}}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(v_k^{i,j}\right)^2}{p_iq_j}+2a & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}v_k^{i,j}}{p_iq_j} \\
C_6^{i,j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(v_k^{i,j}\right)^2}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}\left(u_k^{i,j}\right)^2}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}u_k^{i,j}}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot\sum\limits_{k=1}^{m}v_k^{i,j}}{p_iq_j} & \dfrac{2\cdot m}{p_iq_j}+2a
\end{array}\right],$$

$$M^{**}_{i,j} = \begin{bmatrix} & C_1^{i,j} & C_2^{i,j} & C_4^{i,j} & C_5^{i,j} & C_6^{i,j} \\ C_1^{i,j} & -8 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ C_2^{i,j} & -8 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ C_4^{i,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_5^{i,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_6^{i,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{B}_{i,j} = \left[\frac{2\cdot\sum_{k=1}^{m}\left(v_k^{i,j}\right)^2 r_k^{i,j}}{p_i q_j}, \frac{2\cdot\sum_{k=1}^{m}\left(u_k^{i,j}\right)^2 r_k^{i,j}}{p_i q_j}, \frac{2\cdot\sum_{k=1}^{m} u_k^{i,j} r_k^{i,j}}{p_i q_j}, \frac{2\cdot\sum_{k=1}^{m} v_k^{i,j} r_k^{i,j}}{p_i q_j}, \frac{2\cdot\sum_{k=1}^{m} r_k^{i,j}}{p_i q_j} \right]^T,$$

$$\vec{C}_{i,j} = \left[C_1^{i,j}, C_2^{i,j}, C_4^{i,j}, C_5^{i,j}, C_6^{i,j}\right]^T.$$

Для нахождения вектора-решения x воспользуемся одним из прямых методов решения систем линейных алгебраических уравнений [4]. Для решения системы (18) требуется $(5\cdot(n-2)^2 + 4\cdot(n-2)\cdot(n-1))^2$ памяти для хранения коэффициентов и $(5\cdot(n-2)^2 + 4\cdot(n-2)\cdot(n-1))^3$ операций.

Пример восстановления данных с погрешностью

Для отладки пакета и демонстрации его возможностей в качестве исходных данных выбирались данные, моделирующие возмущенные поверхности второго порядка. Рассмотрим, например, поверхность $Z = \frac{X^2}{k} + \frac{Y^2}{k}$, k – коэффициент масштабирования. В исходные данные Z было внесено возмущение в 40% с помощью генератора случайных чисел. Возмущенные данные Z' были сглажены биквадратным двухпараметрическим сплайном с весовыми коэффициентами $p_i = q_j = 100$, $i = 0,...,n-1$, $j = 0,...,n-1$, $n = 6$. В таб. 1 представлена Z-

компонента этой поверхности в зависимости от переменной X при постоянном значении Y.

Таблица 1. Исходные данные, исходные данные с определенным процентом погрешности и восстановленные данные

Исходные данные	Возмущенные данные	Сглаженные данные
7,14	6,07	6,74
4,86	5,25	4,55
3,71	3,08	3,70
3,71	3,42	3,16
4,86	3,89	3,94
7,14	6,86	6,86

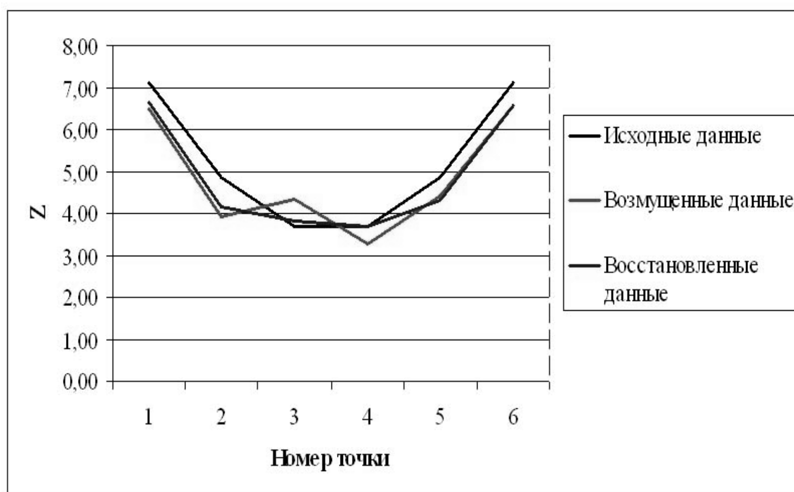


Рис. 3. Графическое представление данных табл. 1

На последующих рисунках представлены возможности разработанного программного продукта. В качестве исходных данных была взята сетка $N = 121$. Значения были расположены в ее узлах.

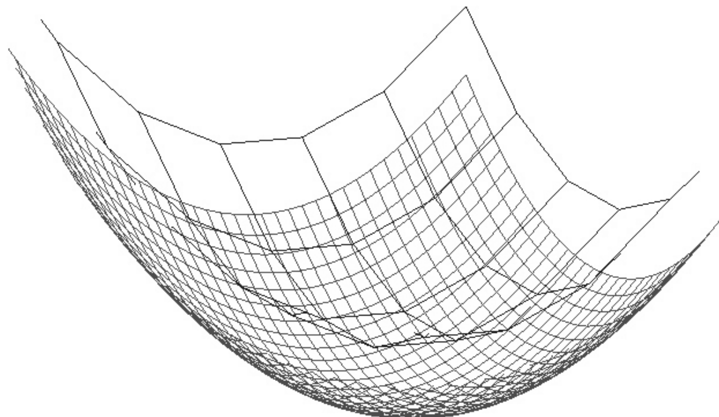


Рис. 4. Пример сплайновой поверхности

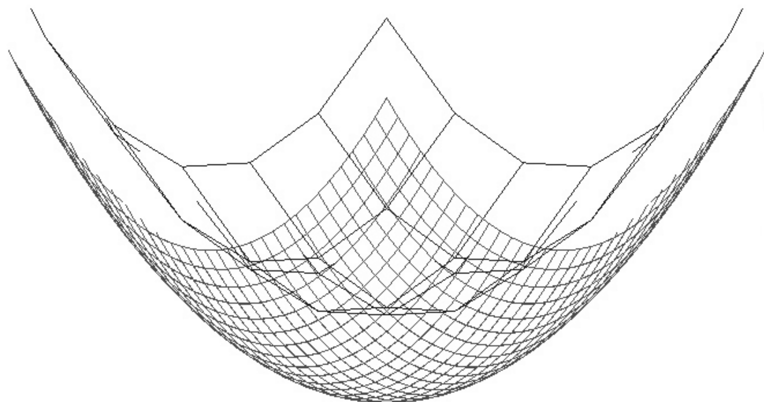


Рис. 5. Пример сплайновой поверхности

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
4. Калиткин Н. Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978.

Марков К. Н., Ширков П. Д. — МКО — 2006, т. 1, стр. 248–259
Markov K., Shirkov P. — MCE — 2006, v. 1, p. 248–259

TWO-DIMENSIONAL SMOOTHING SPLINE APPROXIMATION

Markov K., Shirkov P.

(Russia, Dubna)

This paper is devoted to the problem of smoothing of function of two variables for the case of irregular grid. Algorithm of construction of smoothing bi-quadratic spline is described. This algorithm uses the regularization procedure for obtaining coefficients of spline and easily generalized for the case of high order spline approximation.